

Modélisation et prévision de la volatilité réalisée par mouvement brownien fractionnaire multivarié

Réplication de Bibinger, Yu & Zhang (2025) — arXiv:2504.15985

Yassine M. Milos G. Issam F. Yves-Marie S.

30 mai 2026

Contexte et motivation

Modèle mfBm

Estimateurs BYZ

Test de réversibilité temporelle

Prévision optimale

Résultats Monte Carlo — prévision

Étude empirique

Conclusion

Contexte et motivation

Volatilité réalisée :

$$RV_t = \sum_{i=1}^M r_{t,i}^2, \quad \log RV_t \approx B_t^H \text{ (fBm)}.$$

- Gatheral, Jaisson, Rosenbaum (2018) : $\hat{H} \approx 0.1$ — **volatilité rough**.
- HAR (Corsi 2009) : excellent benchmark univarié.
- **Problème ouvert** : exploiter la corrélation *inter-actifs* dans un cadre rough multivarié?

Réponse de BYZ (2025)

Le mfBm autorise des Hurst *différents* par actif tout en maintenant une forte corrélation contemporaine, et donne un prédicteur optimal en forme fermée.

Modèle	Multivarié	Hurst hétérogènes
GARCH-DCC	✓	×
fBm univarié (GJR 2018)	×	×
HAR / V HAR	✓	×
VARFIMA	✓	×
mfBm (BYZ 2025)	✓	✓

- Amblard & Coeurjolly (2011) : théorie du mfBm, pas d'estimation.
- BYZ : **premier** estimateur opérationnel + prévision optimale.

Modèle mfBm

Définition du mfBm

$(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ est un mfBm de paramètres $(H_1, H_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho, \eta)$ si :

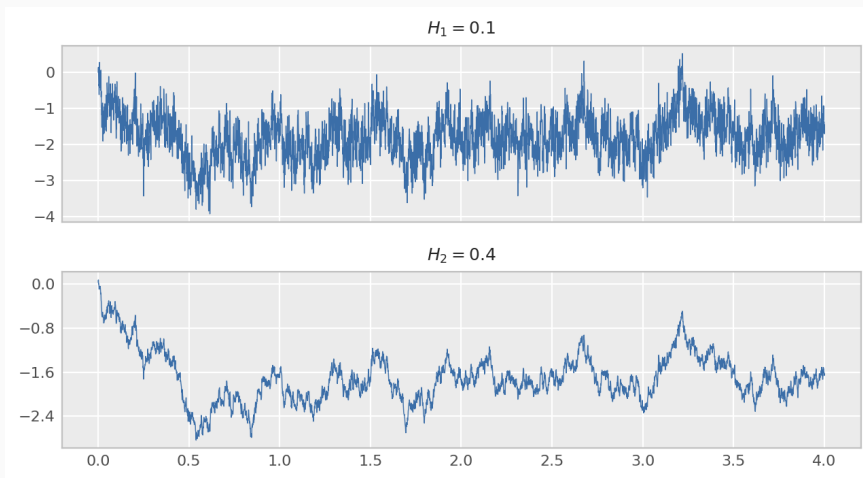
1. **Gaussien** et centré.
2. **Auto-similaire** : $(B_{\lambda t}^{(1)}, B_{\lambda t}^{(2)}) \stackrel{d}{=} (\lambda^{H_1} B_t^{(1)}, \lambda^{H_2} B_t^{(2)})$.
3. **Accroissements stationnaires**.
4. Covariance croisée (Eq. 4 de BYZ) :

$$\text{Cov}(B_s^{(1)}, B_t^{(2)}) = \frac{\rho \sigma_1 \sigma_2}{2} [w(s, t-s, \bar{H}) + w(t, s-t, \bar{H})] + \frac{\eta \sigma_1 \sigma_2}{2} [w(s, t-s, \bar{H}) - w(t, s-t, \bar{H})].$$

Cas temporellement réversible ($\eta = 0$) — **Eq. 5**

$$\text{Cov}(B_s^{(1)}, B_t^{(2)}) = \rho \sigma_1 \sigma_2 w(t, s-t, \bar{H}), \quad \bar{H} = (H_1 + H_2)/2.$$

Trajectoires simulées — fig1_paths.png

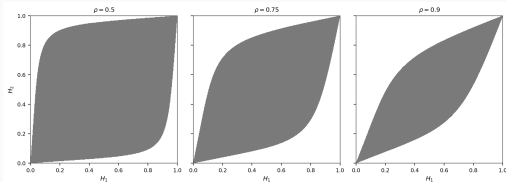
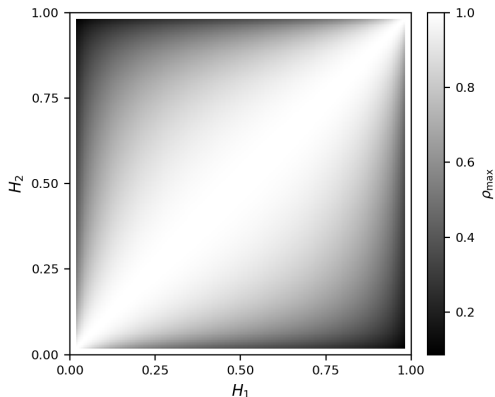


Simulation

Cholesky de la mfBm réversible ($n = 1\,000$, $\rho = 0.4$, $\eta = 0$). Haut : $H_1 = 0.1$ (très rough).
(plus régulier).

Bas : $H_2 = 0.4$

Contrainte d'admissibilité — fig2_rhox.png et fig3_admissible.png



Zone grise = (H_1, H_2) admissibles pour $\rho \in \{0.5, 0.75, 0.9\}$. La contrainte se resserre à mesure que $|\rho|$ augmente.

$$\rho_{\max}(H_1, H_2) = \frac{\sqrt{\sin(\pi H_1) \sin(\pi H_2) \Gamma(2H_1+1) \Gamma(2H_2+1)}}{\sin(\pi \tilde{H}) \Gamma(2\tilde{H}+1)}$$

$\rho_{\max} = 1$ sur la diagonale $H_1 = H_2$.

Estimateurs BYZ

Quatre estimateurs — Eqs. (6)–(8b)

$$\Delta_k B^{(j)} = B_{k\delta}^{(j)} - B_{(k-1)\delta}^{(j)}, \quad \Delta_{k,2} B^{(j)} = B_{2k\delta}^{(j)} - B_{(2k-2)\delta}^{(j)}.$$

$$(1) \text{ Hurst (Eq. 6) : } \hat{H}_j = \frac{1}{2 \log 2} \log \left(\frac{\sum_k (\Delta_{k,2} B^{(j)})^2}{\sum_k (\Delta_k B^{(j)})^2} \right).$$

$$(2) \text{ Échelle (Eq. 7) : } \hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_k (\Delta_k B^{(j)})^2}{n \delta^{2\hat{H}_j}}.$$

$$(3) \text{ Corrélation (Eq. 8a) : } \hat{\rho} = \frac{\sum_k \Delta_k B^{(1)} \Delta_k B^{(2)}}{\sqrt{\sum_k (\Delta_k B^{(1)})^2 \cdot \sum_k (\Delta_k B^{(2)})^2}}.$$

$$(4) \text{ Asymétrie (Eq. 8b) : numérateur } \propto \sum_k (\Delta_{k+1} B^{(2)} \Delta_k B^{(1)} - \Delta_{k+1} B^{(1)} \Delta_k B^{(2)}).$$

Normalité asymptotique (Thm. 3.1)

Sous $H_j < 3/4$:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma(\theta_0)).$$

- Condition $H < 3/4$: rang de Hermite $m = 2 \Rightarrow$ théorème de Breuer-Major.
- $\hat{\rho}$ est **invariant** à $(H_1, H_2, \sigma_1, \sigma_2)$.
- $\hat{\eta}$ a une variance MC élevée quand $\eta \approx 0$.

Monte Carlo — estimateurs de Hurst (Table 1)

Vraies valeurs : $H_1 = 0.1$, $H_2 = 0.4$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\eta = 0$, $\delta = 1/52$, 1 000 réplifications.

Setting	$\hat{H}_1$ (vrai = 0.1)			$\hat{H}_2$ (vrai = 0.4)		
	Biais	Std	RMSE	Biais	Std	RMSE
$\rho = 0, n = 500$	-0.001	0.043	0.043	-0.001	0.036	0.036
$\rho = 0, n = 1000$	-0.001	0.031	0.031	-0.003	0.025	0.025
$\rho = 0.4, n = 500$	-0.001	0.043	0.043	+0.000	0.036	0.036
$\rho = 0.4, n = 1000$	-0.001	0.031	0.031	-0.002	0.025	0.025

- Biais quasi nul. $\text{Std} \propto n^{-1/2}$: ✓ consistance.
- $\hat{H}_j$ indépendant de ρ ✓.
- Std empiriques proches de AVar théorique ✓.

Monte Carlo — $\hat{\rho}$ et $\hat{\eta}$ (Table 3)

$H_1 = 0.1$, $H_2 = 0.4$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, 1 000 réplifications.

(ρ_0, η_0)	n	$\hat{\rho}$			$\hat{\eta}$		
		Biais	Std	RMSE	Biais	Std	RMSE
(0, 0)	500	−0.001	0.045	0.045	+0.000	0.117	0.117
	1000	+0.000	0.034	0.034	+0.002	0.082	0.082
(0.4, 0)	500	−0.001	0.039	0.039	+0.000	0.107	0.107
	1000	+0.000	0.029	0.029	+0.002	0.075	0.075
(0, 0.5)	500	−0.003	0.045	0.045	+0.005	0.133	0.133
(0.4, 0.5)	500	−0.003	0.037	0.037	+0.007	0.125	0.126

$\hat{\eta}$ plus bruité que $\hat{\rho}$ (Std $\approx 3 \times$ plus grande) mais biais négligeable.

Test de réversibilité temporelle

Test $H_0 : \eta_{ij} = 0$ — Cor. 3.1 (Table 4 + Table 9)

Test asymptotique (Wald)

Rejet si $\mathcal{T}_n = \sqrt{n} |\hat{\eta}| / \sqrt{\widehat{\text{AVAR}}_{\hat{\eta}}} > \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)$.

Taille & puissance MC (Table 4) :

$n_{\text{rep}} = 5000$, $\rho = 0.4$, $H_1 = 0.1$, $H_2 = 0.4$.

η_0	1% $n=500$	1% $n=1000$
0	0.010	0.012
0.2	0.257	0.545
0.4	0.888	0.998
0.6	0.999	1.000

Taille bien contrôlée, puissance $\rightarrow 1$.

Empirique (seuil 1%, DJ30 2013–2021) :

	AAPL	ALD	AMGN	AXP	BA	BEL
ALD	NR					
AMGN	NR	NR				
AXP	NR	R	NR			
BA	NR	NR	NR	NR		
BEL	R	NR	NR	NR	NR	
CAT	NR	NR	NR	NR	NR	NR

19/21 paires : réversibilité non rejetée.

20/21 décisions match BYZ Table 9.

Prévision optimale

Prédicteur optimal bivarié — Prop. 4.1

Données : $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ observés à l'instant t .

$$\hat{B}_{t+h|t}^{(1)} = w^{11} B_t^{(1)} + w^{12} B_t^{(2)},$$

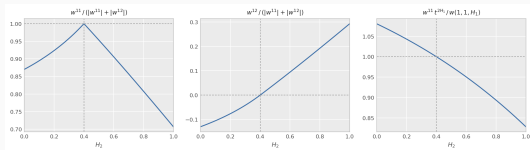
$$w^{11} = \frac{1}{1 - \rho^2} \left(\frac{w(t, h, H_1)}{t^{2H_1}} - \rho^2 \frac{w(t, h, \bar{H})}{t^{2\bar{H}}} \right), \quad w^{12} = \frac{\rho}{1 - \rho^2} \left(\frac{w(t, h, \bar{H})}{t^{2\bar{H}}} - \frac{w(t, h, H_1)}{t^{2H_1}} \right).$$

Conditions de gain (Prop. 4.4–4.5)

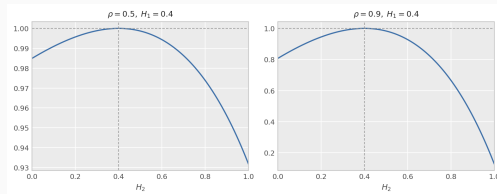
$$w^{12} = 0 \iff H_1 = H_2 \text{ ou } \rho = 0.$$

La cross-prévision n'apporte rien si les actifs ont le même Hurst.

Poids et MSFE relative — fig4 et fig5

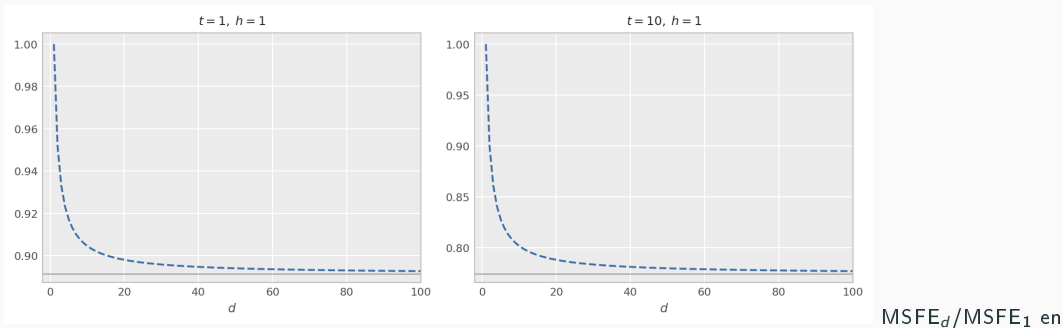


Poids en fonction de H_2 ($H_1 = 0.4$, $\rho = 0.5$). $w^{12} = 0$ quand $H_2 = H_1$.



MSFE biv./univ. < 1 dès que $H_2 \neq H_1$. Gain amplifié pour $\rho = 0.9$ (droite).

Gain en dimension — fig6_msfe_dimension.png



fonction de d ($H_1 = 0.4$, $H_j = 0.1$, $\rho = 0.8$, $h = 1$). Gauche : $t = 1$ (gain $\approx 11\%$). Droite : $t = 10$ (gain $\approx 23\%$). Convergence rapide : $d \leq 10$ capture l'essentiel.

Résultats Monte Carlo — prévision

MSFE simulé — effet de ρ (Table 5)

$H_1 = 0.4$, $H_2 = 0.1$, $T = 1\,000$, 1 000 réplifications.

ρ	h	Composante 1		Composante 2	
		fBm (Sim)	bfBm (Sim)	fBm (Sim)	bfBm (Sim)
0.0	1	0.467	0.467	0.106	0.109
	5	0.548	0.548	0.203	0.203
0.4	1	0.467	0.463	0.106	0.109
	5	0.548	0.546	0.203	0.204
0.8	1	0.467	0.418	0.106	0.095
	5	0.548	0.502	0.203	0.179

$\rho = 0.8$, $h = 5$: gain -8.4% (comp. 1) et -11.9% (comp. 2).

MSFE simulé — effet de H_2 (Table 6)

$H_1 = 0.4$, $\rho = 0.4$, $T = 1\,000$, 1 000 répliques.

H_2	h	Composante 1		Composante 2	
		fBm (Sim)	bfBm (Sim)	fBm (Sim)	bfBm (Sim)
0.1	1	0.467	0.467	0.467	0.488
	5	0.548	0.548	0.548	0.543
0.2	1	0.467	0.467	0.292	0.304
	5	0.548	0.548	0.403	0.403
0.4 (= H_1)	1	0.467	0.463	0.106	0.109
	5	0.548	0.546	0.203	0.204

Quand $H_2 = H_1 = 0.4$: bfBm $\approx$ fBm (gain nul, Prop. 4.4 ✓).

Étude empirique

Données

- Oxford-Man Realized Library.
- DJ30 : AAPL, ALD, AMGN, AXP, BA, BEL, CAT.
- Fréquence : journalière, 2013–2021.
- Variable : $\log RV_t$ (5-min).

Protocole

- Fenêtre d'estimation : 252 jours glissants.
- Cible : AAPL ; auxiliaires : ALD, AMGN, AXP, BA.
- Horizons : $h \in \{1, 5, 10, 20\}$.
- Critère : RMSFE.
- P1 : 20/03/2015 – 11/04/2017.
- P2 : 12/04/2017 – 30/07/2021.

Paramètres estimés — Table 8

Diagonale = $\hat{H}$, hors-diagonale = $\hat{\rho}$. Moyenne 2013–2021.

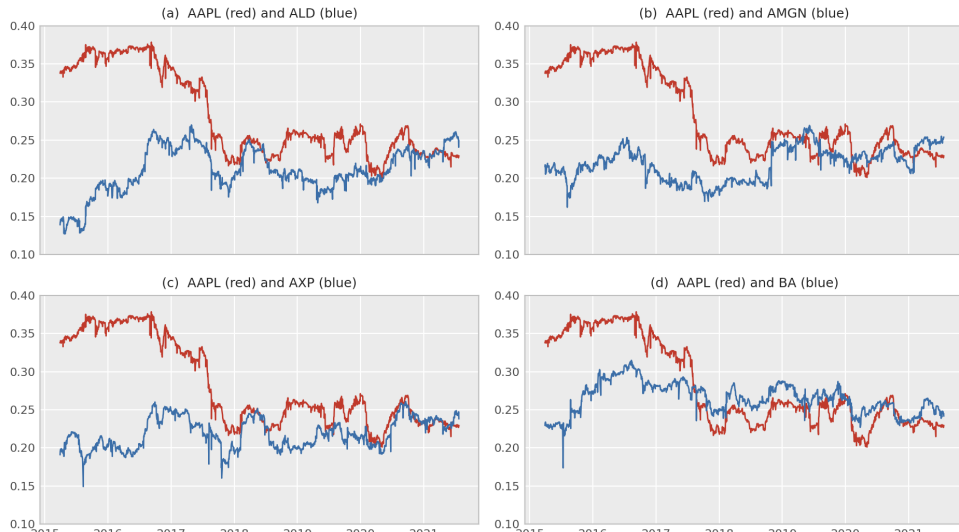
	AAPL	ALD	AMGN	AXP	BA	BEL	CAT
AAPL	0.283	0.409	0.377	0.396	0.389	0.342	0.383
ALD		0.207	0.327	0.406	0.371	0.327	0.401
AMGN			0.229	0.314	0.284	0.259	0.244
AXP				0.225	0.369	0.356	0.423
BA					0.255	0.265	0.335
BEL						0.186	0.290
CAT							0.217

$\hat{H} \in [0.186, 0.283]$: **volatilité rough** confirmée sur tous les actifs.

Corrélations $\hat{\rho} \in [0.24, 0.42]$.

Hurst roulant — fig7_rolling_H.png

Figure 7: Rolling window estimates of H for log realized volatilities



RMSFE hors échantillon — Table 10 (espace RV)

Période	h	fBm	bfBm	mfBm3	mfBm4	mfBm5
Totale	1	0.0598	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596
	5	0.0851	0.0846	0.0846	0.0845	0.0846
	10	0.0953	0.0947	0.0946	0.0946	0.0947
	20	0.1062	0.1055	0.1054	0.1053	0.1054
P1 (2015–17)	1	0.0504	0.0496	0.0496	0.0495	0.0496
	5	0.0689	0.0671	0.0668	0.0666	0.0667
	10	0.0733	0.0706	0.0702	0.0704	0.0705
	20	0.0768	0.0741	0.0736	0.0733	0.0734
P2 (2017–21)	1	0.0640	0.0641	0.0641	0.0642	0.0641
	5	0.0921	0.0922	0.0922	0.0922	0.0922
	10	0.1045	0.1045	0.1045	0.1045	0.1046
	20	0.1178	0.1177	0.1177	0.1176	0.1177

P1 $h = 20$: mfBm4 gagne **−4.6%** sur fBm. P2 : gains quasi nuls (Hurst convergés).

Comparaison avec HAR et VHAR — Table 11 (espace RV)

RMSFE période totale. HAR/VHAR ajustés directement sur RV (Corsi 2009).

h	HAR	VHAR2	VHAR3	VHAR4	VHAR5	fBm	mfBm4
1	0.0607	0.0613	0.0615	0.0618	0.0626	0.0598	0.0596
5	0.0861	0.0895	0.0898	0.0924	0.0950	0.0851	0.0845
10	0.0990	0.1107	0.1094	0.1172	0.1222	0.0953	0.0946
20	0.1149	0.1407	0.1334	0.1508	0.1523	0.1062	0.1053

- **mfBm4 domine** à $h \geq 10$: -8.4% vs HAR à $h = 20$.
- $VHAR > HAR$ (monotone en d) : plus d'actifs sans contrainte = bruit.
- mfBm gagne sur fBm grâce à la contrainte de covariance multivariée.

Conclusion

1. **Modèle** : premier cadre rough multivarié opérationnel — Hurst hétérogènes + corrélation forte.
2. **Estimation** : estimateurs des moments consistants, asymptotiquement normaux (Thm. 3.1), sans optimisation.
3. **Test** : bootstrap de réversibilité temporelle — non rejeté pour 19/21 paires DJ30.
4. **Prévision** : prédicteur optimal en forme fermée ; gain $\Longleftrightarrow H_1 \neq H_2$ et $\rho \neq 0$.
5. **Empirique** : gains nets sur fBm univarié en Période 1 ($h = 20$, -4.6%) ; gains disparaissent en Période 2.

Message clé

La valeur du mfBm est conditionnelle à la **dispersion des Hurst entre actifs**. Quand elle s'estompe, HAR et fBm univarié suffisent.

Merci.

Code : `github.com/yessinemx/Mfbm_realized_vol`

Référence : Bibinger, Yu & Zhang (2025) — arXiv :2504.15985